MỤC LỤC

PHẦN 1: ĐẠI SỐ

CHUYÊN ĐỀ 1
BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

CHỦ ĐỀ: BIỂU THỨC CHỨA CĂN

1 Kiến thức cần ghi nhớ:

- Số dương a có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$ (với $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$)
- Số $\sqrt{a}$ là căn bậc hai số học của số dương a.
- Số 0 là căn bậc hai duy nhất của 0 và cũng là căn bậc hai số học của 0
- $\sqrt{a}$ có nghĩa (xác định) khi $a \geq 0$
- $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$, $\forall a \geq 0,\ b \geq 0$.
- $\sqrt{a^2} = |a|, \forall a$.
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$, $\forall a \geq 0,\ b \geq 0$.
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\forall a \geq 0,\ b \geq 0$.
- $\sqrt{a^2 b} = |a|.\sqrt{b}$ $\forall a, \forall b \geq 0$.
- $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ $\forall a \geq 0,\ b \geq 0$. $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$ $\forall a < 0,\ b \geq 0$.
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{|b|}$ $\forall ab > 0,\ b \neq 0$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$ $\forall a, \forall b > 0$
- $\dfrac{c}{\sqrt{a} \pm b} = \dfrac{c\left(\sqrt{a} \mp b\right)}{a - b^2}$ $\forall a > 0,\ a \neq b^2$
- $\dfrac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \dfrac{c\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)}{a - b}$ $\forall c, \forall a \geq 0,\ b \geq 0,\ a \neq b^2$

CHỦ ĐỀ: BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

DẠNG 1. BIỂU THỨC ĐƠN GIẢN CHỨA CĂN

Phương pháp giải:

- Bước 1. Phân tích các số trong dấu căn nhằm xuất hiện bình phương.
- Bước 2. Rút gọn các căn thức đồng dạng.
- Bước 3. Kết luận

DẠNG 2. BIỂU THỨC CHỨA CĂN CÓ THỂ ĐƯA VỀ HẰNG ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải:

- Áp dụng HĐT: $\sqrt{A^2} = |A|$
- Nếu các biểu thức có dạng $m \pm p\sqrt{n}$ (trong đó $p\sqrt{n} = 2ab$ với $a^2+b^2=m$ thì đều viết được dưới dạng bình phương của một biểu thức.

DẠNG 3. BIỂU THỨC CHỨA CĂN Ở MẪU

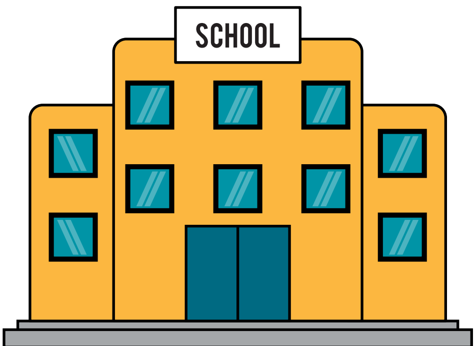
Phương pháp giải:

Khử căn thức ở mẫu:
- Trục căn thức ở mẫu.
- Phân tích thành nhân tử

DẠNG 4. BIỂU THỨC PHỨC TẠP

Phương pháp giải:

- Thường gặp những biểu thức vừa có ẩn hằng đẳng thức trong căn, vừa chứa căn thức ở mẫu.
- Để giải dạng này ta thường kết hợp phương pháp giải ở dạng 1, dạng 2 và dạng 3.



CHỦ ĐỀ BIỂU THỨC CHỨA CHỮ

Thông thường bài toán được cho dưới dạng tổng hợp gồm:

- Một câu hỏi chính: rút gọn biểu thức
- Các câu hỏi phụ:

- Tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa (hay tìm ĐKXĐ).
- Tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến.
- Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức.
- Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức.
- Tìm giá trị của biến để biểu thức thỏa mãn điều kiện cho trước.

Các dạng bài tập

1 Tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa

Phương pháp giải

- $\sqrt{A}$ được xác định khi và chỉ khi $A \geq 0$
- $1/A$ được xác định khi và chỉ khi $A \neq 0$

Ví dụ:

Cho biểu thức

$M = \frac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}$. Tìm điều kiện xác định và rút gọn M

Giải:

Điều kiện: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $1 + \sqrt{xy} \neq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Với $x \geq 0$; $y \geq 0$ ta có: $M = \frac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}} = \frac{(x\sqrt{y} - y\sqrt{x}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{1+\sqrt{xy}}$

$= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{1+\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(1+\sqrt{xy})}{1+\sqrt{xy}}$

$= \sqrt{x} - \sqrt{y}$

Vậy $M = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ với $x \geq 0$; $y \geq 0$

2 Tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến

Phương pháp giải

- Bước 1: Rút gọn A (nếu cần)
- Bước 2: Rút gọn x (nếu cần)
- Bước 3: Thay x vào A
- Bước 4: Kết luận

Ví dụ:

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, khi $x = 4$

Giải:

Thay $x = 4$ vào A ta được: $A = \frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}-1} = \frac{2+1}{2-1} = 3$

Vậy $A = 3$ khi $x = 4$

3 Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức

Phương pháp giải

- CM đẳng thức: Biến đổi vế trái về vế phải hoặc vế phải về vế trái hoặc biến đổi cả hai vế về biểu thức trung gian.
- CM bất đẳng thức $A > m$

\+ Cách 1:

B1: Xét hiệu $H = A - m$

B2: Chứng minh $H > 0$

B3: Kết luận

\+ Cách 2:

B1: Xét thương $T = \frac{A}{m}$ $(A,\ m > 0)$

B2: Chứng minh $T > 1$

B3: Kết luận

Ví dụ:

Chứng minh rằng với $x > 0$ và $x \neq 1$ thì $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

Giải:

Với $x > 0$ và $x \neq 1$ ta có:

$$VT = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Vậy với $x > 0$ và $x \neq 1$ thì

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

4 Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của một biểu thức

1 PHƯƠNG PHÁP 1

- Chứng minh A ≤ m. Dấu "=" có thể xảy ra. max A = m.
- Chứng minh A ≥ n. Dấu "=" có thể xảy ra. min A = n.

(m, n là hằng số)

2 PHƯƠNG PHÁP 2

$A = \frac{m}{P(x)}$ (với $P(x)>0$ và $m>0$)

A đạt GTNN khi P(x) đạt GTLN.

A đạt GTLN khi P(x) đạt GTNN.

3 PHƯƠNG PHÁP 3

$A = \frac{m}{P(x)}$;(bậc của P(x) ≥ bậc của Q(x)

Đưa về dạng $A = n + \frac{k}{Q(x)}$ với *n,k là hằng số*

4 PHƯƠNG PHÁP 4

$A = \frac{P(x)}{Q(x)}$;(bậc của P(x)≥bậc của Q(x))

Đưa về dạng $A = P_1(x) + \frac{m}{Q(x)}$

(với m là hằng số)

Áp dụng BĐT Cô-si phù hợp

Cho hai biểu thức $P=\frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ (x>0, x≠4). Tìm giá trị của x để $\frac{P}{Q}$ đạt GTNN.

Giải

Với x>0, x≠4 ta có:

$$Q=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{x-3\sqrt{x}+2+5\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}}{x-4}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\Rightarrow\frac{P}{Q}=\frac{x+3}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{3}$$

(do bất đẳng thức Côsi)

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{x}=\frac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn)

Vậy GTNN của $\frac{P}{Q}$ là $2\sqrt{3}$ khi x=3.

5 Tìm giá trị của biến để giá trị của biểu thức thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài toán 1. Tìm x để biểu thức A=m (m là hằng số)

01 Đặt điều kiện xác định và rút gọn A (nếu cần)

02 Bổ sung tính chất để làm mất mẫu của phương trình

03 Giải phương trình vừa thu được để tìm x

04 Đối chiếu với điều kiện và tìm ra các nghiệm hợp lí.

Bài toán 2. Tìm x để biểu thức A<m (hoặc A>m hoặc A≤m hoặc A≥m) (m là hằng số)

01 Đặt điều kiện xác định và rút gọn A (nếu cần)

02 Quy về BPT A-m<0. Quy đồng mẫu thức (nếu cần) để rút gọn vế trái về dạng 1 phân thức đơn giản

03 Xác định dấu của tử hoặc mẫu của vế trái

04 Giải BPT trên để tìm x

05 Đối chiếu với điều kiện và tìm ra các nghiệm hợp lí.

Cho biểu thức

$$B=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}+2}{4-x}\right):\frac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4}$$

a. Rút gọn biểu thức B.
b. Tìm x để B=2.
c. Tìm các giá trị của x để B có giá trị âm.

Điều kiện: x>0, x≠4, x≠9

a. Với x>0, x≠4, x≠9 ta có:

$$B=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}+2}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}\right):\frac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)-2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)-(5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\cdot\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}+2-2x+4\sqrt{x}-5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\cdot\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}$$

$$=\frac{-x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}=\frac{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$$

Vậy B= $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ với x>0, x≠4, x≠9

b. B=2 ⇔ $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$=2

$\sqrt{x}+2=2\sqrt{x}-6\Leftrightarrow\sqrt{x}=8\Leftrightarrow x=64$

(thỏa mãn điều kiện)

c. B<0 ⇔ $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$<0

⇔ $\sqrt{x}-3<0$ (vì $\sqrt{x}+2>0$)

⇔ $\sqrt{x}$ <3 ⇔x<9. Kết hợp ĐK ta được 0<x<9 và x≠4.

CHUYÊN ĐỀ 2
HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ BẬC NHẤT

1. Khái Niệm:

Hàm số bậc nhất là hàm số được viết dưới dạng $y=ax+b(a\neq 0)$

Hàm số đồng biến trên R khi $a > 0$

Hàm số nghịch biến trên R khi $a < 0$

2. Đồ Thị Hàm Số $y=ax+b(a\neq 0)$

Đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng:

Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b

Song song với đường thẳng $y=ax$ và cũng chính là đường thẳng $y=ax$ nếu $b=0$.

3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Chúng ta có 3 vị trí tương đối của hai đường thẳng

$y=ax+b;\ y=a'x+b'(a;a'\neq 0)$

song song: $\begin{cases} a=a' \\ b\neq b' \end{cases}$;cắt nhau: $a\neq a'$;

trùng nhau: $\begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$

Lưu ý: Đối với vị trí cắt nhau, ta cũng có trường hợp đó là hai đường thẳng vuông góc với nhau khi đó: $a.a'=-1$

4. Hệ số góc

Về phương trình đường thẳng dạng chuẩn đó là $y=ax+b(a\neq 0)$, ta có hệ số góc của đường thẳng này chính là a

Đôi khi, phương trình đường thẳng được viết dưới dạng $ax+by+c=0$ Thì ta sẽ biến đổi một chút thành dạng chuẩn

$ax+by+c=0(b\neq 0) \Leftrightarrow by=-ax-c \Leftrightarrow y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

hệ số góc của đường thẳng này chính là $\frac{-a}{b}$

CHỦ ĐỀ HÀM SỐ $y = ax^2 (a = 0)$

1. Định nghĩa

Hàm số có dạng
$y = ax^2$ $(a \neq 0)$

2. Tính chất

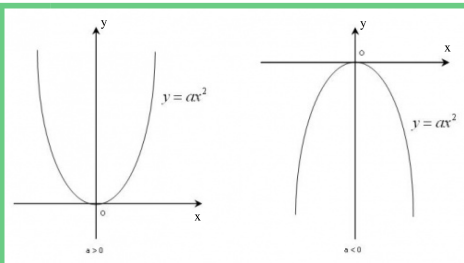
Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị của x thuộc R và:

+ Nếu a > 0 thì hàm số nghịch biến khi x < 0, đồng biến khi x > 0
+ Nếu a < 0 thì hàm số đồng biến khi x < 0, nghịch biến khi x > 0

3. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

– Đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một Parabol đi qua gốc tọa độ nhận trục Oy làm trục đối xứng
+ Nếu a > 0 thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị
+ Nếu a < 0 thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị

Minh họa đồ thị hàm số
$y = ax^2$ $(a \neq 0)$



• Bổ sung: Công thức tính toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và độ dài đoạn thẳng

Cho hai điểm phân biệt A và B với $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$.
Độ dài đoạn thẳng AB được tính bởi công thức

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Tọa độ trung điểm M của AB được tính bởi công thức:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

*** Quan hệ giữa Parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $y = mx + n$**

Cho Parabol (P): $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng (d): $y = mx + n$.

• Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = mx + n \end{cases}$$

• Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình $ax^2 = mx + n$ (*)

• Số giao điểm của (P) và (d) là số nghiệm của phương trình (*)

+ Nếu (*) vô nghiệm thì (P) và (d) không có điểm chung

+ Nếu (*) có nghiệm kép thì (P) và (d) tiếp xúc nhau

+ Nếu (*) có hai nghiệm phân biệt thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

*** Một số phép biến đổi đồ thị**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C)

• Đồ thị (C1): $y = f(x) + b$ được suy ra bằng cách tịnh tiến (C) dọc theo trục tung b đơn vị.

• Đồ thị (C2): $y = f(x + a)$ được suy ra bằng cách tịnh tiến (C) dọc theo trục hoành $-a$ đơn vị.

• Đồ thị (C3): $y = f(|x|)$ gồm hai phần

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy, bỏ phần (C) nằm bên trái Oy.

+ Lấy đối xứng phần (C) nằm bên phải Oy qua Oy.

• Đồ thị (C4): $y = |f(x)|$ gồm hai phần

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên trên Ox, bỏ phần (C) nằm bên dưới Ox.

+ Lấy đối xứng phần (C) nằm bên dưới Ox qua Ox.

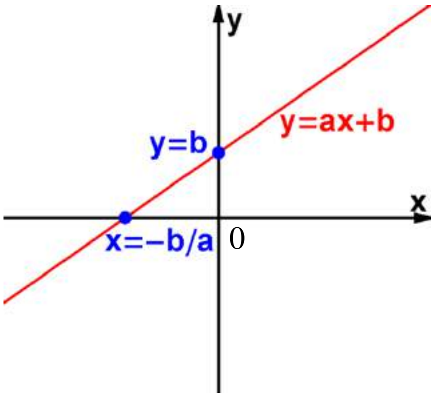
Các dạng bài tập
PHẦN HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Dạng 1: Xác định hàm số.
Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

⇨ Hàm số y=ax+b

- Đồng biến trên ℝ khi a>0
  Nghịch biến trên ℝ khi a<0

- $A(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị khi $y_0 = ax_0+b$

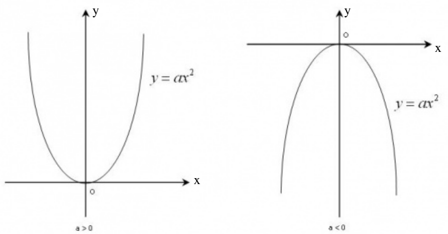


⇨ Hàm số $y=ax^2$

- Nếu a>0
  - Hàm số đồng biến khi x>0
  - Hàm số nghịch biến khi x<0

- Nếu a<0
  - Hàm số đồng biến khi x<0
  - Hàm số nghịch biến khi x>0

- $A(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị khi $y_0=ax_0^2$



Dạng 2: Vẽ đồ thị của hàm số

⇨ Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất y=ax+b

- Bước 1: Chọn điểm P(0; b) (trên Oy).
- Bước 2: Chọn điểm Q $(-^b/_a;0)$ (trên Ox).
- Bước 3: Kẻ đường thẳng PQ.

⇨ Vẽ đồ thị hàm số $y=ax^2$

- Bước 1: Lập bảng giá trị (thường từ 5 đến 7 giá trị) tương ứng giữa x và y.
- Bước 2: Vẽ các điểm có tọa độ (x;y) vừa tìm được
- Bước 3: Vẽ Parabol đi qua các điểm trên

Lưu ý: Vì đồ thị hàm số y=ax+b là một đường thẳng nên muốn vẽ nó chỉ cần xác định hai điểm phân biệt thuộc đồ thị. Do đó trong trường hợp giá trị $(-{}^{b}/_{a};0)$ khó xác định trên trục Ox thì ta có thể thay điểm Q bằng cách chọn một giá trị x_1 của x sao cho điểm $Q(x_1;y_1)$ (trong đó $y_1=ax_1+b$) dễ xác định hơn trong mặt phẳng tọa độ.

Dạng 3: Tìm điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua với mọi tham số

- Bước 1: Giả sử $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d): y=ax+b luôn đi qua
- Bước 2: Đặt điều kiện $y_0=ax_0+b(*)$ đúng với mọi m
- Bước 3: Biến đổi (*) về dạng Am + B = 0 ∀m ⇔A=0; B=0
- Bước 4: Kết luận

Dạng 4: Ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng quy

⇨ Chứng minh ba điểm thẳng hàng

- Bước 1: Tìm phương trình đường thẳng đi qua hai điểm
- Bước 2: Chứng minh điểm còn lại thuộc đường thẳng đó
- Bước 3: Kết luận

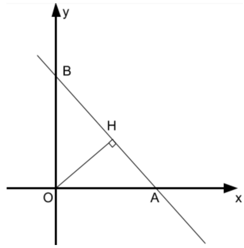
⇨ Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

- Bước 1: Tìm tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2)
- Bước 2: Chứng minh M thuộc (d_3)
- Bước 3: Kết luận

Dạng 5: Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng

Cho đường thẳng (d): $y = ax + b(a, b \neq 0)$, ta có:

+ d ∩ Ox= $A(-\frac{b}{a};0)$ ⇒ OA= $\left|-\frac{b}{a}\right|$
+ d ∩ Oy= B(0;b) ⇒ OB= $|b|$
+ Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng d. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông là: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$



DẠNG 6: Sự tương giao giữa hai đồ thị

Bài toán 1: Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho đường thẳng (d): y=ax+b và (d’): y=a'x+b'
+ d song song d’ khi và chỉ khi a=a’; b≠b’
+ d vuông góc với d’ khi và chỉ khi a.a’= - 1
+ d trùng d’ khi và chỉ khi a=a’; b=b’
+ d cắt d’ khi và chỉ khi a≠a’

Bài toán 2: Vị trí tương đối của đường thẳng và parabol

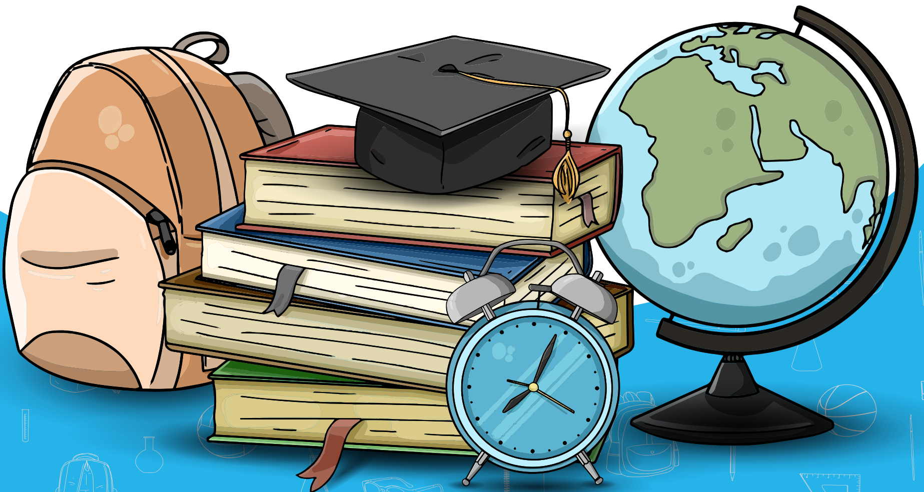
⇨Tìm giao điểm của đường thẳng y=ax+b (a≠0)và Parabol y=Ax^2 (A≠0)

- Phương trình hoành độ giao điểm Ax^2=ax+b(*)
- Hoành độ giao điểm là nghiệm của (*)

⇨ Số giao điểm bằng số nghiệm của (*)

- d cắt (P)⇔(*) có 2 nghiệm phân biệt
- d tiếp xúc (P) ⇔(*) có nghiệm kép
- d không cắt (P)⇔ (*) vô nghiệm

CHUYÊN ĐỀ 3
PHƯƠNG TRÌNH



PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1

- **Phương trình 1 ẩn** là phương trình có dạng *P(x) = Q(x)*
  (x là ẩn), vế trái P(x) và vế phải Q(x) là hai biểu thức của cùng một biến x.
- Một phương trình có thể có 1 nghiệm, 2 nghiệm... nhưng cũng có thể vô nghiệm. Giải phương trình là tìm tất cả các nghiệm (hoặc tìm tập nghiệm) của phương trình đó.
- Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có tập nghiệm bằng nhau (kể cả bằng tập rỗng). Quy tắc biến một phương trình thành một phương trình tương đương với nó được gọi là quy tắc biến đổi tương đương.

2

- Phương trình dạng ax + b = 0 (a, b là hai số đã cho; $a \neq 0$) là **phương trình bậc nhất 1 ẩn**.
- **2 quy tắc biến đổi tương đương:**
  - *Quy tắc chuyển vế :* Trong 1 phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.
  - *Quy tắc nhân với một số:* Ta có thể nhân (hoặc chia) cả hai vế của 1 phương trình với cùng một số khác 0.

Cách giải phương trình bậc nhất một ẩn:

- - Có ax + b = 0 <=> ax = -b (quy tắc chuyển vế) <=> $x = \frac{-b}{a}$ (chia hai vế cho a khác 0).
  - Vậy phương trình bậc nhất 1 ẩn ax + b = 0 luôn có 1 nghiệm duy nhất là $x = \frac{-b}{a}$

Kiến thức nâng cao

1) Phương trình ax + b = 0.
+ Với $a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-b}{a}$
+ Với a = 0, phương trình có dạng 0x = -b (b = 0 thì phương trình có vô số nghiệm,
$b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm).

2) Với phương trình chứa tham số m, giải và biện luận phương trình tùy theo các trường về giá trị của m.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN
VÀ HỆ THỨC VI - ET

I. Phương trình bậc hai một ẩn

• *Định nghĩa:*

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $ax^2+bx+c=0$

Trong đó x là ẩn; a,b,c là những số cho trước gọi là các hệ số, $a \neq 0$

• *Công thức nghiệm của phương trình bậc hai:*

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Nếu $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- Nếu $\Delta < 0$ phương trình vô nghiệm

• *Công thức thu gọn*

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ và $b = 2b'$

$\Delta' = b'^2 - ac$

- Nếu $\Delta' > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$
- Nếu $\Delta' = 0$ phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$
- Nếu $\Delta' < 0$ phương trình vô nghiệm

II. Hệ thức Vi-et và ứng dụng:

1. *Hệ thức Vi-et*

Nếu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$

thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

2. *Ứng dụng tìm hai số biết tổng và tích của chúng*

Muốn tìm hai số u và v, biết u+v = S, uv = P, ta giải phương trình:

$x^2 - Sx + P = 0$ (điều kiện để có u và v là $S^2 - 4P \geq 0$)

3. *Tính nhẩm nghiệm*

- Nếu a+b+c = 0 thì phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ có hai nghiệm:

$$x_1 = 1;\ x_2 = \frac{c}{a}$$

- Nếu a-b+c = 0 thì phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ có hai nghiệm:

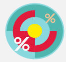
$$x_1 = -1;\ x_2 = -\frac{c}{a}$$

CÁC DẠNG BÀI TẬP VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI, HỆ THỨC VI-ET VÀ ỨNG DỤNG

Dạng 1 & 2: Giải phương trình bậc hai một ẩn

Dạng 1

- Bước 1: Xác định các hệ số a, b, c trong phương trình (a≠0)
- Bước 2: Tính h$\Delta = b^2 - 4ac$ hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$
- Bước 3: Kết luận nghiệm



Dạng 2

Định lí Vi-et đảo

- Bước 1: Tính tổng u+v=S và tích uv=P
- Bước 2: u,v là hai nghiệm của phương trình X^2-SX+P=0
- Bước 3: Giải phương trình, tìm u,v

Dạng 3: Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước

Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$

- Trường hợp 1: Nếu $a = 0$ => $bx = -c$

Nếu $b = c = 0$ => Phương trình có vô số nghiệm

Nếu $b \neq 0$ => Phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{c}{b}$

Nếu $b = 0,\ c \neq 0$ => Phương trình vô nghiệm

- Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$

Tính $\Delta = b^2 - 4ac$ ($\Delta' = b'^2 - ac$)

Nếu $\Delta < 0$ => Phương trình vô nghiệm

Nếu $\Delta = 0$ => Phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$

Nếu $\Delta > 0$ => Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Tìm m để phương trình có nghiệm thỏa mãn (*) cho trước

- Bước 1: Tính Δ hoặc Δ'
- Bước 2: Chứng minh phương trình luôn có nghiệm hoặc đặt điều kiện để phương trình có nghiệm (**)
- Bước 3: Biểu diễn (*) qua tổng và tích các nghiệm Áp dụng Vi-et
- Bước 4: Giải điều kiện (*)
- Bước 5: So sánh m vừa tìm được với (**) và kết luận

Dạng 4: Xác định dấu của nghiệm

$$ax^2 + bx + c = 0 \; (a \neq 0)$$

Hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ ac<0

Hai nghiệm cùng dấu

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

Hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

Hai nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

*Chú ý:

+ Nếu bài toán yêu cầu hai nghiệm phân biệt thì ta thay đổi điều kiện $\Delta > 0$
+ Có thể thay Δ trong các điều kiện trên thành Δ'
+ $P = \frac{c}{a}$; $S = -\frac{b}{a}$

Dạng 5: Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số

- Bước 1: Tính Δ hoặc Δ'
- Bước 2: Chứng minh phương trình luôn có nghiệm hoặc đặt điều kiện để phương trình có nghiệm (**)
- Bước 3: Áp dụng Vi-et tìm tổng và tích hai nghiệm theo m
- Bước 4: Khử m để được hệ thức (dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số)
- Bước 5: Kết luận

Dạng 1: Phương trình bậc ba, phương trình bậc bốn

1.1. Phương pháp nhẩm nghiệm đưa về phương trình tích

- x_0 là nghiệm của phương trình A(x)=0 khi và chỉ khi thay x_0 vào phương trình ta nhận được $A(x_0)=0$
- Nếu các hệ số của phương trình cộng lại bằng 0 thì phương trình có nghiệm x=1
- Nếu tổng các hệ số của biến bậc lẻ bằng tổng của các hệ số của biến bậc chẵn với hệ số tự do thì phương trình có nghiệm x=-1.

1.2. Phương pháp đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai $at^2+bt+c=0$

1

Phương trình trùng phương $ax^4+bx^2+c=0$, $(a\neq0)$

- Bước 1: Đặt $t=x^2\ (t\geq0)$, đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai ẩn t: $at^2+bt+c=0$
- Bước 2: Giải phương trình $at^2+bt+c=0$, loại các giá trị $t<0$
- Bước 3: Với $t\geq0$, giải $x^2=t \Rightarrow x=\pm\sqrt{t}$ là nghiệm của phương trình. Kết luận

2

Phương trình đối xứng bậc bốn $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, $(a\neq0)$

- Bước 1: Xét x=0 thay vào phương trình suy ra: a=0 (vô lí)
- Bước 2: Chia cả hai vế cho x^2 ta được

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0 \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0 \quad (1)$$

Đặt $t=x+\frac{1}{x} \Rightarrow t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

(1) Trở thành: $a(t^2-2)+bt+c=0$

- Bước 3: Giải phương trình bậc hai theo ẩn t
- Bước 4: Thay $t=x+\frac{1}{x}$. Giải phương trình tìm x và kết luận nghiệm của phương trình.

Phương trình dạng (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=A (Với a+d=b+c=k)

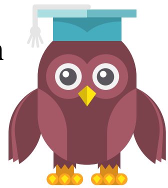
3

- Bước 1: Biến đổi tương đương phương trình nhân (x+a)(x+d) và (x+b)(x+c) ta được: $(x^2+kx+ad)(x^2+kx+bc)=A$
- Bước 2: Đặt ẩn phụ $t=x^2+kx+ad$, ta được phương trình bậc hai ẩn t. Giải phương trình tìm được t
- Bước 3: Thay t vào tìm x. Kết luận nghiệm của phương trình

**Lưu ý: Ngoài ra, với một số phương trình bậc ba, bậc bốn khác ta áp dụng linh hoạt các hai phương pháp trên để tìm nghiệm của bài toán.*

Dạng 2: Phương trình dạng phân thức

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình
- Bước 2: Quy đồng, khử mẫu
- Bước 3: Giải phương trình, loại nghiệm
- Bước 4: Kết luận



Dạng 3: Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Bài toán 1: |A|=B (1)

Điều kiện có nghiệm: B không âm

Trường hợp 1: A≥0. Khi đó |A|=A

(1) ⇔ A=B

Trường hợp 2: A<0. Khi đó |A|=-A

(1) ⇔ -A=B

Bài toán 2: |A|=|B| (2)

|A|=|B|⇔ A=B hoặc A=-B

Dạng 4: Phương trình vô tỉ đơn giản

1 *Bài toán 1:* $\sqrt{A}=B$ *(1)*

- Điều kiện để phương trình có nghiệm : B≥0(2)
- Bình phương 2 vế phương trình (1)ta được $A=B^2$(3)
- Giải phương trình (3), chọn nghiệm thỏa mãn điều kiện (2). Suy ra nghiệm của phương trình (1)

* Chú ý: Trong quá trình giải lưu ý không cần lấy điều kiện để A≥0

2 *Bài toán 2:* $\sqrt{A}=\sqrt{B}$ (1)

- Tìm ĐKXĐ của phương trình: B≥0 và A≥0(2)
- Bình phương 2 vế ta được A=B(3)
- Giải phương trình (3), chọn nghiệm thỏa mãn điều kiện (2). Suy nghiệm của phương trình (1)

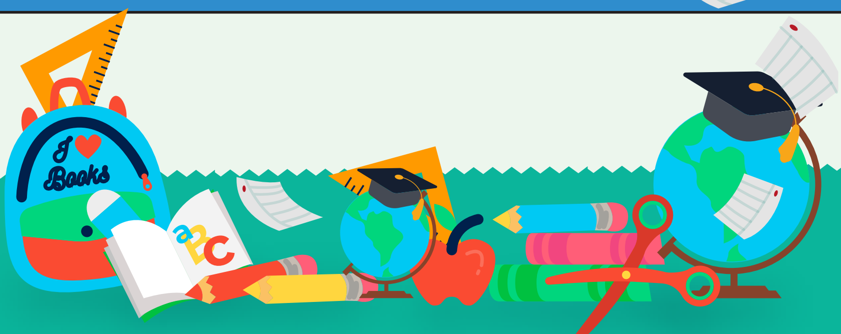
3 *Bài toán 3:* $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$ (1)

- Nếu C<0 thì Phương trình (1) vô nghiệm
- Nếu C=0 ta có $\sqrt{A}+\sqrt{B}=0 \Leftrightarrow A=0; B=0$ (I)
  Nếu hệ (I) có nghiệm thì phương trình (1) có nghiệm
- Nếu C>0. Tìm ĐKXĐ của phương trình $B \geq 0$ và $A \geq 0$ (2)
  Bình phương hai vế phương trình (1), biến đổi được phương trình:
  $\sqrt{A.B}=\frac{C^2-A-B}{2}$ (3)
  Phương trình (3) có dạng như bài toán 1 nên giải theo phương pháp của bài toán 1

  Chú ý: Tương tự, giải phương trình dạng $\sqrt{A}-\sqrt{B}=C$ *thêm điều kiện* $\sqrt{A} \geq C$

4 *Bài toán 4:* $a.A(x)+b\sqrt{A(x)}+c=0$

- Đặt $t=\sqrt{A(x)}$ $(t \geq 0)$
- Phương trình trở thành $at^2+bt+c=0$
  Giải phương trình tìm t với điều kiện $t \geq 0$
  Thay $t=\sqrt{A(x)}$, tìm x



CHUYÊN ĐỀ 4
HỆ PHƯƠNG TRÌNH

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1 Phương trình bậc nhất hai ẩn

1.1 Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là hệ thức dạng:

$ax + by = c \quad (1)$

Trong đó a, b và c là các số đã biết (a ≠ 0 hoặc b ≠ 0).

1.2 Tập hợp nghiệm của phương trình:

Một nghiệm của phương trình (1) là một cặp số $(x_0 ; y_0)$ sao cho $ax_0+by_0=c$

Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm.

Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng $ax + by = c$, kí hiệu là (d).

– Nếu a ≠ 0 và b ≠ 0 thì công thức nghiệm là: $x \in R;\ y=\frac{c-ax}{b}$ hoặc $y \in R;\ x=\frac{c-by}{a}$

Khi đó đường thẳng (d) cắt cả hai trục tọa độ.

– Nếu a = 0, b ≠ 0 thì công thức nghiệm là: $x \in R;\ y = \frac{c}{b}$ và (d) // Ox

– Nếu a ≠ 0, b = 0 thì công thức nghiệm là: $y \in R;\ x = \frac{c}{a}$ và (d) // Oy.

2 Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

2.1. Khái niệm: Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \quad \text{(I)}$$

trong đó $ax+by=c$ và $a'x+b'y=c'$ là những phương trình bậc nhất hai ẩn.

\+ Nếu hai phương trình của hệ có nghiệm chung thì nghiệm chung ấy gọi là ***nghiệm của hệ phương trình (I).*** Trái lại, nếu hai phương trình không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) là ***vô nghiệm.***
Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.

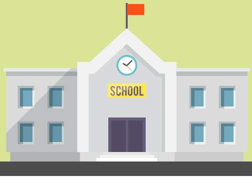
2.2. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Đối với hệ phương trình (I), ta gọi:

\+ (d) là đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $ax+by=c$

\+ (d') là đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $a'x+b'y=c'$

- Nếu (d) cắt (d') thì hệ (I) có một nghiệm duy nhất. $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$
- Nếu (d) song song (d') thì hệ (I) vô nghiệm. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
- Nếu (d) trùng với (d') thì hệ (I) có vô số nghiệm... $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$



CÁC DẠNG BÀI TẬP
HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Dạng 1: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn không chứa tham số

Phương pháp cộng đại số

- Bước 1: Nhân hai vế của phương trình trong hệ với hệ số thích hợp
- Bước 2: Cộng hoặc trừ từng vế của hai phương trình để được phương trình chỉ còn x hoặc y
- Bước 3: Giải tìm x,y
- Bước 4: Kết luận

Phương pháp thế

- Bước 1: Từ một phương trình của hệ rút x theo y hoặc y theo x
- Bước 2: thay x hoặc y vào phương trình còn lại
- Bước 3: Giải hệ phương trình mới
- Bước 4: Kết luận

Phương pháp đặt ẩn phụ

- Bước 1: Đặt điều kiện của phương trình
- Bước 2: Đặt ẩn phụ, điều kiện của ẩn phụ. Đưa hệ ban đầu về hệ mới
- Bước 3: Giải hệ mới tìm ẩn phụ
- Bước 4: Thay giá trị ẩn phụ tìm x và y
- Bước 5: Kết luận

(*) Nếu hệ phương trình có biểu thức chứa căn hoặc phân thức chứa x và y thì phải có điều kiện xác định của hệ.

Ví dụ:
Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x-2y=5 \quad (1) \\ 2x+y=8 \quad (2) \end{cases}$$

Cách 1: Giải bằng phương pháp cộng đại số

Nhận xét:

Bằng phương pháp cộng đại số, bài toán có hai hướng làm:

- Để hệ số x bằng nhau ta nhân hai vế của (1) với 2, nhân hai vế của (2) với 3
- Để hệ số y đối nhau ta nhân hai vế của (2) với 2

Ở bài này, làm theo hướng 2:

$$\begin{cases} 3x-2y=5 & (1) \\ 2x+y=8 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5 \\ 4x+2y=16 \end{cases}$$

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình ta có: $7x=21 \Leftrightarrow x=3$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$6 + y=8 \Leftrightarrow y=2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(3;2)$

Cách 2: Giải bằng phương pháp thế

Nhận xét: Ta nên rút y theo x ở phương trình hai của hệ, vì hệ số của y là 1.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow y=8-2x$

Thay $y=8-2x$ vào (1) ta được: $3x-2(8-2x)=5 \Leftrightarrow 7x-16=5 \Leftrightarrow 7x=21 \Leftrightarrow x=3$

Với $x=3$ thì $y=8-2.3=2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(3;2)$

Dạng 2: Hệ phương trình chứa tham số

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

<u>Cách 1:</u> Tìm (x;y) theo tham số rồi tìm điều kiện của tham số

<u>Cách 2:</u>

- Nếu hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$
- Nếu hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
- Nếu hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Ví dụ:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x-y=2m+3 \\ x+2y=3m+1 \end{cases}$ (m là tham số)

a, Giải hệ phương trình với m=2

b, Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x;y) thỏa mãn $x^2 + y^2 = 5$

a. Với m=2, ta có hệ:

$$\begin{cases} 3x-y=7 \\ x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y=14 \\ x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=21 \\ 3x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

b. Vì $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{2}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất *(x;y)*

$$\begin{cases} 3x-y=2m+3 \\ x+2y=3m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y=4m+6 \\ x+2y=3m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=7m+7 \\ 3x-y=2m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m+1 \\ y=m \end{cases}$$

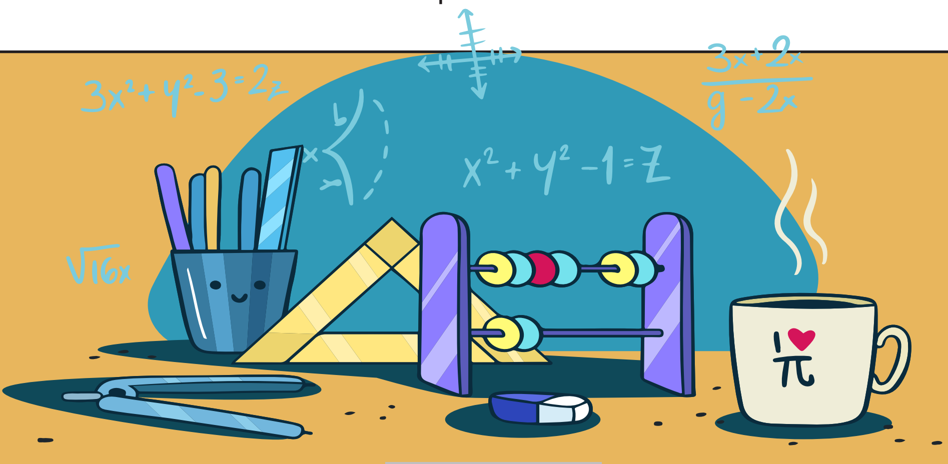
Hệ phương trình có nghiệm *(x;y)=(m+1;m)*

Theo đề bài, ta có: $x^2 + y^2 = 5$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 + m^2 = 5 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(m-1)(m+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Vậy *m=1* hoặc *m=-2* thì hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn đề bài.



MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ HỆ BẬC NHẤT

Hệ phương trình đối xứng loại I

Định nghĩa

Hệ phương trình đối xứng loại I theo ẩn x và y là hệ phương trình mà khi ta đổi vai trò của các ẩn x và y thì hệ phương trình vẫn không thay đổi.

Hệ phương trình đối xứng loại I có dạng $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ (I)

trong đó $\begin{cases} f(x, y) = f(y, x) \\ g(x, y) = g(y, x) \end{cases}$

Cách giải hệ phương trình đối xứng loại I

Bước 1: Đặt $S = x + y$; $P = xy$.
(điều kiện: $S^2 \geq 4P$)

Bước 2: Biểu diễn $f(x;y), g(x;y)$ qua S và P, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} F(S,P) = 0 \\ G(S,P) = 0 \end{cases}$$

Biến đổi hệ phương trình có hai ẩn S,P giải ra S và P (Sử dụng phương pháp thế hoặc cộng đại số).

Bước 3: Tìm được S và P, khi đó x và y là nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - SX + P = 0$ (1)
Giải phương trình bậc hai theo ẩn X.

Bước 4: Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

Một số biểu diễn biểu thức đối xứng qua S và P

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = S^3 - 3SP$

$x^2y + y^2x = xy(x+y) = SP$

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

Chú ý:

- Nếu $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình.
- Hệ (I) có nghiệm khi (1) có nghiệm hay $S^2 - 4P \geq 0$

Hệ phương trình đối xứng loại II

Định nghĩa

Hệ phương trình đối xứng loại II theo ẩn x và y là hệ phương trình mà khi ta đổi vai trò của các ẩn x và y thì hai phương trình trong hệ sẽ hoán đổi cho nhau.

Hệ phương trình đối xứng loại II có dạng $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(y, x) = 0 \end{cases}$

Cách giải hệ phương trình đối xứng loại II

Bước 1: Cộng hoặc trừ hai vế của hai hệ phương trình thu được một phương trình. Biến đổi phương trình này về phương trình tích, tìm biểu thức liên hệ giữa x và y đơn giản.
Bước 2: Thế x theo y (hoặc y theo x) vào một trong hai phương trình của hệ ban đầu.
Bước 3: Giải và tìm ra nghiệm x (hoặc y) từ đó suy ra nghiệm còn lại.
Bước 4: Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

Chú ý : khi giải hệ phương trình thì chúng ta phải tìm cách làm giảm số ẩn của hệ để thuận lợi trong việc giải nó

CHUYÊN ĐỀ 5

CÁC DẠNG TOÁN THỰC TẾ

CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ GIẢI BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Dạng 1 Bài toán về quan hệ giữa các số

Phương pháp giải

Cách viết số trong hệ thập phân của số tự nhiên:

+ Số có hai chữ số: $\overline{ab}=10a+b$
+ Số có ba chữ số: $\overline{abc}=100a+10b+c$
+ Số có bốn chữ số: $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$

- *Quan hệ chia hết và chia có dư:*

Số a chia cho b được thương bằng c và có số dư là r, được viết lại là: $a=b.c+r$

Nếu a chia hết cho b thì số dư $r=0$

Nếu a không chia hết cho b thì số dư $0 < r < b$

Dạng 2 Bài toán về công việc đồng thời

Phương pháp giải

Nếu x giờ (hoặc ngày) làm xong công việc thì mỗi giờ (hoặc ngày) làm được $\frac{1}{x}$ công việc đó,

Nếu trong 1 giờ (hoặc ngày) làm được $\frac{1}{x}$ công việc thì a giờ (hoặc ngày) làm được $\frac{a}{x}$ công việc đó.

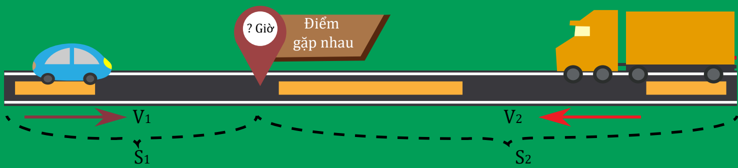
Dạng **3**

Bài toán về chuyển động

Phương pháp giải

Dựa vào công thức $S=vt <=> v=\frac{S}{t} <=> t=\frac{S}{v}$ trong đó S là quãng đường, v là vận tốc và t là thời gian.

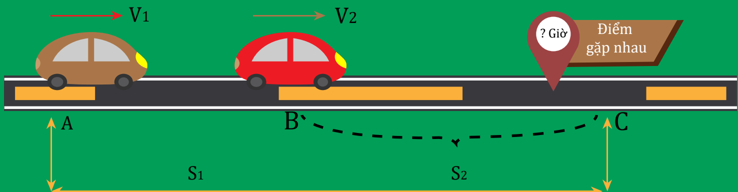
- Chuyển động ngược chiều và gặp nhau:



Hai xe cùng xuất phát một lúc và đi ngược chiều nhau từ hai đầu quãng đường S, với vận tốc lần lượt là v1,v2 sau thời gian t hai xe gặp nhau. Ta có:

$$S=S_1+S_2=v_1t+v_2t <=> t=\frac{S}{v_1+v_2}$$

- Chuyển động cùng chiều và đuổi kịp nhau:



Hai xe cùng xuất một lúc tại hai địa điểm A và B cách nhau một khoảng S, cùng đi về phía C. Sau một khoảng thời gian t hai xe gặp nhau. Ta có:

$$S=S_1-S_2=v_1t-v_2t <=> t=\frac{S}{v_1-v_2}$$

Một ca nô chuyển động trên dòng nước với vận tốc thực v:

\+ Vận tốc xuôi dòng = v + vận tốc dòng nước

\+ Vận tốc ngược dòng = v - vận tốc dòng nước

\+ Vận tốc dòng nước = $\frac{1}{2}$ (vận tốc xuôi dòng - vận tốc ngược dòng)

Dạng 4 Bài toán về năng suất

Phương pháp giải

Khi giải các bài toán liên quan đến năng suất thì liên hệ giữa ba đại lượng là:
Khối lượng công việc = năng suất lao động x thời gian
Ở đây, ***năng suất lao động*** chính là số sản phẩm mà mỗi ngày (giờ) làm được

Dạng 5 Bài toán về lãi suất ngân hàng

Phương pháp giải

a. Lãi đơn: là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra

Ví dụ: Khi ta gửi tiết kiệm 100 (triệu đồng) vào một ngân hàng với lãi suất 8%/năm thì sau một năm ta nhận được số tiền lãi là: 100.8%=8 (triệu đồng)

+ Số tiền lãi này như nhau và được cộng vào hàng năm. Kiểu tính lãi như này được gọi là ***lãi đơn***.
+ Sau hai năm số tiền cả gốc lẫn lãi là: 100+2.8=116 (triệu đồng)
+ Sau n năm thì số tiền cả gốc lẫn lãi là: 100+n.8 (triệu đồng)

Vậy, công thức tính khi áp lãi đơn là: $T=A(1+r.n)$

Trong đó:

T: Số tiền cả gốc lẫn lãi sau n kì hạn;

A: Tiền gửi ban đầu;

n: Số kì hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kì, tính theo %

b. ***Lãi kép:*** Là số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra, thay đổi theo từng định kì.

Ví dụ: Khi ta gửi tiết kiệm 100 (triệu đồng) vào một ngân hàng với lãi suất 8%/năm thì sau một năm, ta nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi là:

100 + 8 = 108 (triệu đồng)

Toàn bộ số tiền 108 (triệu đồng) sau năm đầu tiên được gọi là tiền gốc.

Tổng số tiền cả gốc lẫn lãi cuối năm thứ hai là:

108 + 108.8%=116,64 (triệu đồng)

Vậy, công thức tính khi áp dụng lãi kép gửi 1 lần là : $T=A(1+r)^n$

Trong đó:

T: Số tiền cả gốc lẫn lãi sau n kì hạn;

A: Tiền gửi ban đầu;

n: Số kì hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kì, tính theo %.

Dạng 6 Bài toán về tăng giá, giảm giá và tăng, giảm dân số

Phương pháp giải

Bài toán dân số: Gọi a là số dân biết trước. Khi đó:

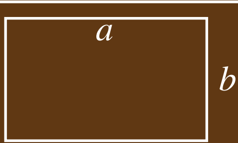
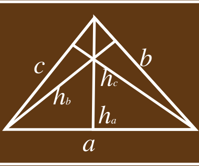
- \+ Nếu tăng dân số thêm $b\%$ thì ta có số dân sau khi tăng là: $a+ab\%$
- \+ Nếu giảm dân số $b\%$ thì ta có số dân sau khi giảm là: $a-ab\%$

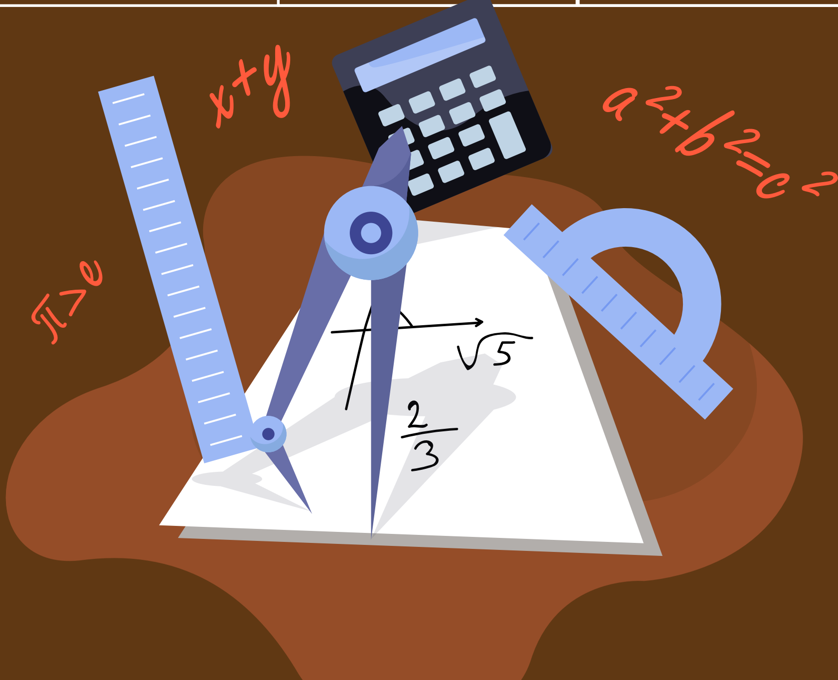
Bài toán tăng giá, giảm giá: Gọi x là giá tiền ban đầu của một sản phẩm

- \+ Nếu tăng giá thêm $y\%$ thì ta có giá của sản phẩm sau khi tăng là: $x + xy\%$
- \+ Nếu giảm giá $y\%$ thì ta có giá của sản phẩm sau khi giảm là: $x - xy\%$

Dạng **7** Bài toán có nội dung hình học

Phương pháp giải

Hình	Chu vi	Diện tích
	$C=4a$	$S=a^2$
	$C=(a+b).2$	$S=a.b$
	Chu vi: $C=a+b+c$ Nửa chu vi: $P=\dfrac{a+b+c}{2}$	$S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$



CHUYÊN ĐỀ 6

BẤT ĐẲNG THỨC - CỰC TRỊ

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

1. Định nghĩa

• Giả sử A và B là hai biểu thức bằng số hoặc bằng chữ. Khi đó:

+ $A > B$; $A < B$; $A \geq B$; $A \leq B$ được gọi là các bất đẳng thức

+ Các bất đẳng thức trên được viết lại như sau:

$A - B > 0$; $A - B < 0$; $A - B \geq 0$; $A - B \leq 0$

+ Một BĐT bất kì có thể đúng, cũng có thể sai.

• Quy ước: Khi nói về một bất đẳng thức mà không nói gì thêm thì ta hiểu đó là một bất đẳng thức đúng.

2. Tính chất cơ bản của bất đẳng thức

• Bắc cầu

Với số thực A, B, C bất kì, ta luôn có $A \leq B, B \leq C \Leftrightarrow A \leq C$

Với các số thực A, B, C, D bất kì, ta luôn có

$A \leq B$; $C \leq D \Rightarrow A + C \leq B + D$;

$A \leq B$; $C \leq D \Rightarrow A - D \leq B - C$

• Giao hoán

Với các số thực A và B bất kì, ta luôn có $A \leq B \Leftrightarrow B \geq A$

• Liên hệ với phép nhân

+ Với số thực A, B bất kì:

$A \leq B$; $M > 0 \Rightarrow A.M \leq B.M$;

$A \leq B$; $M < 0 \Rightarrow A.M \geq B.M$

+ Với số thực A, B, C, D bất kì

$$\begin{cases} 0 < A < B \\ 0 < C < D \end{cases} \Rightarrow 0 < AC < BD$$

• Liên hệ với lũy thừa

Với số thực A, B bất kì:

+ $A \geq B \geq 0 \Leftrightarrow A^n \geq B^n \geq 0$, (n là số thực dương)

+ $A \geq B \Leftrightarrow A^n \geq B^n$, (n là số tự nhiên lẻ)

+ $A \geq B \Leftrightarrow A^n \geq B^n \geq 0$, (n là số tự nhiên chẵn)

+$m \geq n > 0$; $A \geq 1 \Rightarrow A^m \geq A^n$;

+$m \geq n > 0$; $0 < A < 1 \Rightarrow A^m \leq A^n$

• Liên hệ với nghịch đảo

Với các số thực dương A, B bất kì, ta luôn có $A \geq B$: $\Leftrightarrow \frac{1}{A} \leq \frac{1}{B}$

3. Một số bất đẳng thức cơ bản cần nhớ

- $A^2 \geq 0 \quad \forall A$
- $A^{2k} \geq 0 \quad \forall A, \ \forall k \in \mathbb{N}$
- $|A| \geq 0 \quad \forall A$
- $|A+B| \geq |A| - |B| \quad \forall A, B$
- $|A+B| \leq |A| + |B| \quad \forall A, B$
- Nếu a,b,c là ba cạnh của tam giác ABC thì:

+ $a > 0, b > 0, c > 0$
+ $b + c > a > |b-c|$; $c + a > b > |c-a|$;
  $a + b > c > |a-b|$ *(Bất đẳng thức tam giác)*
+ $a > b > c \Leftrightarrow \widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$
  (Quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác)

4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

- Cho biểu thức F(x,y,z) với các biến x,y,z thỏa mãn điều kiện D cho trước
- Ta nói M là giá trị lớn nhất của F khi nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

+ $F(x,y,z) \leq M$ (1) với mọi x,y,z thỏa mãn điều kiện D
+ Tồn tại (x_0, y_0, z_0) thỏa mãn D và $F(x_0, y_0, z_0) = M$
  (Hay nói cách khác dấu đẳng thức ở (1) có xảy ra)

- Tương tự cho giá trị nhỏ nhất của F trên D

Dạng 1: Phương pháp biến đổi tương đương

Phương pháp giải

Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng hoặc bất đẳng thức đã được chứng minh là đúng

Nếu $A < B \Leftrightarrow C < D$ với $C < D$ là một bất đẳng thức hiển nhiên, hoặc đã biết là đúng thì bất đẳng thức $A < B$ đúng.
Giả sử cần chứng minh $A \geq B$. Ta thường biến đổi tương đương về các dạng sau:
+ $A \geq B \Leftrightarrow aX^2+bY^2+cZ^2 \geq 0$ trong đó a,b,c không âm
+ $A \geq B \Leftrightarrow X.Y \geq 0$ (X,Y cùng dấu)

Chú ý các hằng đẳng thức sau:
$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$
$(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2BC+2CA$
$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

Dạng 2: Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Cô-si và bất đẳng thức Bunhiacopski

Phương pháp giải

Bất đẳng thức Cô-si:

Với hai số $a,b \geq 0$, ta có $a+b \geq 2\sqrt{ab}$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$
Bất đẳng thức này còn được viết ở một số dạng khác tương đương là:

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2};\quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

Bất đẳng thức Bunhiacopxki:

Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Ta luôn có:
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay=bx$

Dạng 3: Phương pháp sử dụng một số bất đẳng thức thường dùng khác

Bất đẳng thức	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \forall a,b,c \in R$	$a=b=c$
$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \forall a,b,c \in R$	$a=b=c$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ $\forall a,b>0$ Hoặc $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 4$ $\forall a,b>0$	$a=b$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ $\forall a,b,c>0$ Hoặc $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 9$ $\forall a,b,c>0$	$a=b=c$

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Dạng 1: Phương pháp đưa về tổng bình phương

Phương pháp:

Giả sử cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P. Ta biến đổi P về dạng $P = aA^2 + bB^2 + cC^2 + D$. Trong đó D có giá trị không đổi, a, b, c cùng dấu.

- Nếu $a, b, c \geq 0$ thì $P \geq D$. Ta có giá trị nhỏ nhất của P là D nếu tồn tại đẳng thức A=B=C=0
- Nếu $a, b, c \leq 0$ thì $P \leq D$. Ta có giá trị lớn nhất của P là D nếu tồn tại đẳng thức A=B=C=0

Dạng 2: Phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cơ bản

Phương pháp: Sử dụng bất đẳng thức cơ bản.

Bất đẳng thức	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \forall a,b,c \in R$	a=b=c
$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \forall a,b,c \in R$	a=b=c
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \forall\, a, b > 0$ hoặc $(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4 \forall a, b > 0$	a=b
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \forall a, b, c > 0$ hoặc $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9 \forall a,b,c > 0$	a=b=c

Dạng 3: Phương pháp tam thức bậc hai

Phương pháp:

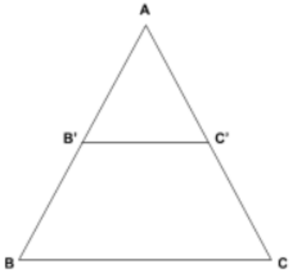
Gán biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thành một biến y. Biến đổi tương đương đưa về phương trình dạng bậc hai ẩn x, tham số y: $ax^2 + bx + c = 0$, ở đây các hệ số a, b, c có chứa y.

- Xét $a = 0$. Tìm y tương ứng
- Xét $a \neq 0$. Đặt điều kiện để phương trình có nghiệm x là $\Delta \geq 0$

Từ đó tìm được điều kiện của y và suy ra giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất (nếu có).

PHẦN 2: HÌNH HỌC

CHUYÊN ĐỀ 1
ĐỊNH LÝ TA-LÉT
TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG



GT	$\triangle ABC,\ B'C'//BC\ (B' \in AB,\ C' \in AC)$
KL	$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC};\ \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C};\ \frac{BB'}{AB} = \frac{C'C}{AC}$

b. Định lý đảo:

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

GT	$\triangle ABC,\ (B' \in AB,\ C' \in AC);\ \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$
KL	$B'C'//BC$

Chú ý: Đẳng thức trong GT có thể thay bằng $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ hoặc $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$

c. Hệ quả:

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có 3 cạnh tương ứng tỉ lệ với 3 cạnh của tam giác đã cho.

GT	$\triangle ABC,\ B'C'//BC\ (B' \in AB,\ C' \in AC)$
KL	$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

<u>Chú ý:</u> Định lý Ta-lét thuận, đảo và hệ quả vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại:

ĐỊNH LÝ TA - LÉT

I. Đoạn thẳng tỉ lệ.

a.Tỉ số hai đoạn thẳng.

- Tỉ số hai đoạn thẳng là tỉ số các độ dài của chúng với cùng một đơn vị đo. Như vậy tỉ số hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào đơn vị mà ta chọn.

b. Đoạn thẳng tỉ lệ

- Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A’B’ và C’D’ nếu ta có tỉ lệ thức:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ hay } \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

- Tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng có tính chất như của tỉ lệ thức giữa các số.

1. Tích các trung tỉ bằng tích các ngoại tỉ.

2. Có thể hoán vị các trung, ngoại tỉ

3. Các tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \Leftrightarrow AB.C'D' = A'B'.CD$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CD}{C'D'} \\ \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{C'D'}{A'B'} \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{C'D'}{CD} \end{cases}$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB \pm A'B'}{CD \pm C'D'}$$

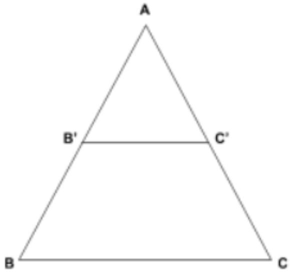
$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

$$\Rightarrow \frac{AB \pm CD}{CD} = \frac{A'B' \pm C'D'}{C'D'}$$

II. Định lý Ta-lét trong tam giác.

a. Định lý thuận:

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



GT	$\triangle ABC,\ B'C'//BC\ (B' \in AB,\ C' \in AC)$
KL	$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC};\ \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C};\ \frac{BB'}{AB} = \frac{C'C}{AC}$

b. Định lý đảo:

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

GT	$\triangle ABC,\ (B' \in AB,\ C' \in AC);\ \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$
KL	$B'C'//BC$

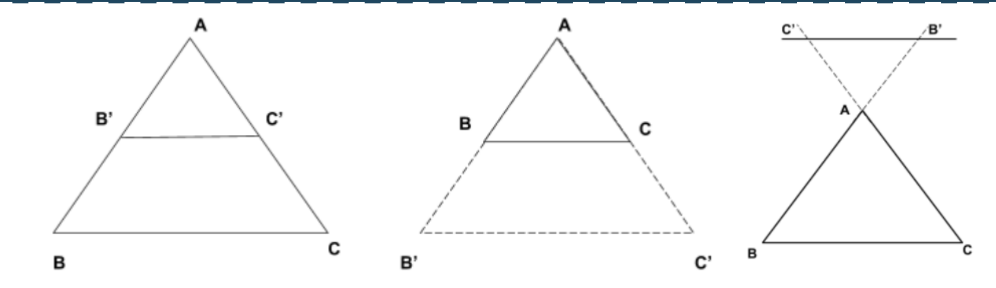
Chú ý: Đẳng thức trong GT có thể thay bằng $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}$ hoặc $\frac{BB'}{AB}=\frac{CC'}{AC}$

c. Hệ quả:

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có 3 cạnh tương ứng tỉ lệ với 3 cạnh của tam giác đã cho.

GT	$\triangle ABC,\ B'C'//BC\ (B' \in AB,\ C' \in AC)$
KL	$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

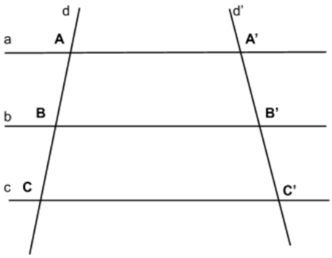
Chú ý: Định lý Ta-lét thuận, đảo và hệ quả vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại:



III. Định lý Ta-lét tổng quát:

a. Định lý thuận:

Nhiều đường thẳng song song định ra trên hai cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.



GT	Cho a//b//c; d cắt a, b, c lần lượt tại A, B, C; d' cắt a, b, c lần lượt tại A', B', C'
KL	$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$

Hướng chứng minh:

Ta có thể chứng minh định lý này bằng cách qua A kẻ một đường thẳng song song với d'. Đường thẳng này cắt b, c theo thứ tự tại B'', C'' . Dễ dàng chứng minh được AB''=A'B', B''C''=B'C' . Sau đó áp dụng định lý Ta-lét trong tam giác vào ΔACC'' để có: $\frac{AB}{BC} = \frac{AB''}{B''C''}$ từ đây suy ra kết luận $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$

b. Định lý đảo.

Cho 3 đường thẳng a, b, c cắt hai cát tuyến d, d' tại các điểm theo thứ tự A, B, C và A', B', C' thỏa mãn tỉ lệ thức: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ mà 2 trong 3 đường thẳng a, b, c là song song với nhau thì 3 đường thẳng a, b, c song song với nhau.

c. Hệ quả (các đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song)

Hệ quả 1: Nhiều đường thẳng đồng quy định ra trên hai đường thẳng song song những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

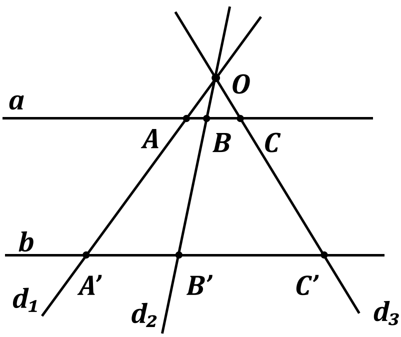
Hướng chứng minh:

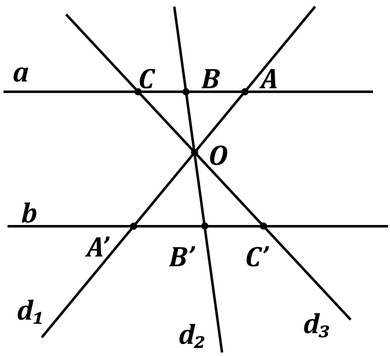
Ta có thể chứng minh hệ quả này bằng cách xét các tam giác AOB và AOC có AB//A'B' và AC//A'C'.

Theo hệ quả định lý Ta-lét trong tam giác ta có: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'}$ và $\frac{AC}{A'C'} = \frac{OA}{OA'}$

từ đó suy ra: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ *(đpcm)*

Hệ quả 2: Nếu nhiều đường thẳng không song song định ra trên hai đường thẳng song song các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì chúng đồng quy tại một điểm **.**





Hướng chứng minh:

Gọi d_1, d_2, d_3 là ba đường thẳng không song song cắt hai đường thẳng song song a và b lần lượt tại A, B, C và A', B', C' thỏa mãn:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Gọi O, O' lần lượt là giao điểm của d_1 và d_3, d_1 và d_2. Theo hệ quả định lí Talet đối với ΔOAC, $\Delta O'AB$ có $\frac{OA}{OA'} = \frac{AC}{A'C'}$; $\frac{O'A}{O'A'} = \frac{AB}{A'B'}$ => $\frac{OA}{OA'} = \frac{O'A}{O'A'}$

mà $O, O' \in d_1 \Rightarrow O \equiv O'$ hay d_1, d_2, d_3 đồng quy

IV. Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Các bài toán tính toán

- Phương pháp giải:

Dựa vào các đường thẳng song song suy ra các tỉ số độ dài giữa các đoạn thẳng đã biết và đoạn thẳng chưa biết

Dạng 2: Các bài toán chứng minh

- Phương pháp giải

+ Các bài toán chứng minh sử dụng định lí Ta-lét thường gặp là các bài toán chứng minh các đẳng thức hay chứng minh hai đường thẳng song song.
+ Trong trường hợp bài toán chứng minh đẳng thức, sử dụng định lí Ta-lét cho các đường thẳng song song để biến đổi hai vế của đẳng thức.
+ Trong trường hợp chứng minh hai đường thẳng song song, ta thường chứng minh các tỉ lệ bằng nhau rồi dùng định lí Ta-lét đảo để suy ra các đường thẳng song song.

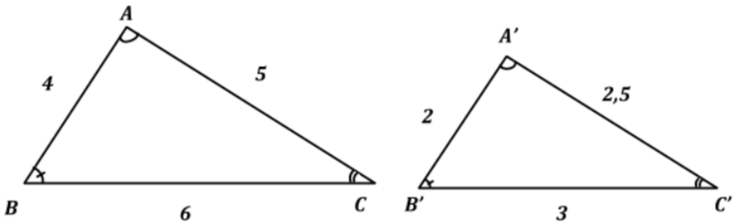
TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG
CÁC DẠNG BÀI VỀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1 Tam giác đồng dạng

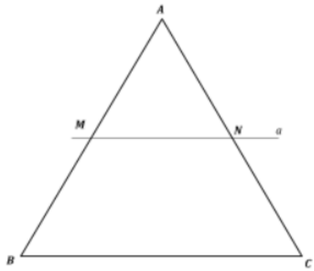
Tam giác A'B'C' gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu :

Các góc: $\widehat{A'}=\widehat{A}$; $\widehat{B'}=\widehat{B}$; $\widehat{C'}=\widehat{C}$

Tỉ lệ các cạnh: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=k$ (k là tỉ số đồng dạng)



– Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.



GT	ΔABC $MN // BC (M \in AB; N \in AC)$
KL	ΔAMN đồng dạng ΔABC

2 Tính chất

$\frac{h'}{h}=k$ (h, h'tương ứng là đường cao của ΔABC và ΔA'B'C')

$\frac{p'}{p}=k$; $\frac{S'}{S}=k^2$ (p, p'tương ứng là nửa chu vi của ΔABC và ΔA'B'C'; S, S'tương ứng là diện tích của ΔABC và ΔA'B'C')

3 Ba trường hợp đồng dạng của tam giác

a) Trường hợp thứ nhất (c.c.c)

Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

b) Trường hợp thứ hai (c.g.c)

Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đồng dạng với nhau.

c) Trường hợp thứ ba (g.g)

Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

4 Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

– Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.
– Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.
– Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

5 Các dạng bài tập

Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng, tỉ số, diện tích
Dựa vào tam giác đồng dạng và tỉ số đồng dạng, tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tính chu vi, diện tích hay tỉ số chu vi, diện tích.

Dạng 2: Chứng minh tam giác đồng dạng
- Xét xem hai tam giác cần chứng minh đồng dạng đã có cặp cạnh nào tỉ lệ chưa? Có góc nào bằng nhau chưa?
- Từ đó, định hướng chứng minh chúng đồng dạng theo trường hợp nào?
- Chứng minh các yếu tố còn thiếu để được đồng dạng theo trường hợp đã định hướng ở trên.

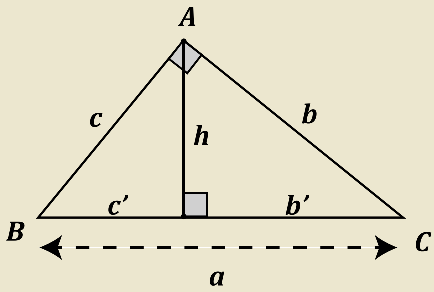
CHUYÊN ĐỀ 2

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

1. Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

Cho ΔABC, góc A bằng 90^0, AH ⊥ BC,
AB = c, AC = b, BC = a, AH = h thì:
+ BH = c' được gọi là hình chiếu của AB xuống BC
+ CH = b' được gọi là hình chiếu của AC xuống BC



Khi đó, ta có:

$AB^2=BH.BC$ hay $c^2=a.c'$	$AB.AC=AH.BC$ hay $b.c=a.h$
$AC^2=CH.BC$ hay $b^2=a.b'$	$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$ hay $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$
$AH^2=CH.BH$ hay $h^2=b'.c'$	$AB^2+AC^2=BC^2$ hay $b^2+c^2=a^2$ *(Định lý Pytago)*

2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

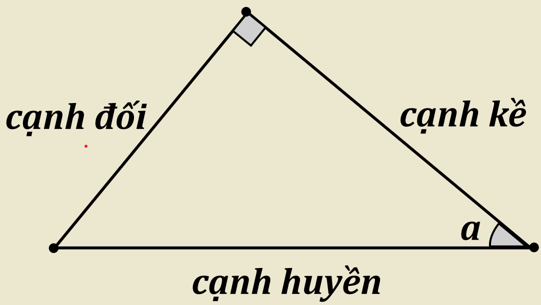
2.1 Định nghĩa

$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$$



2.2 Định lý

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cos góc kia, tan góc này bằng cot góc kia.

2.3 Một số hệ thức cơ bản

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (1)

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (2)

$\tan\alpha.\cot\alpha = 1$ (3)

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (4)

$\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ (5)

$\cot^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ (6)

2.4. So sánh các tỉ số lượng giác

Cho α, β là hai góc nhọn. Nếu $\alpha < \beta$ thì:

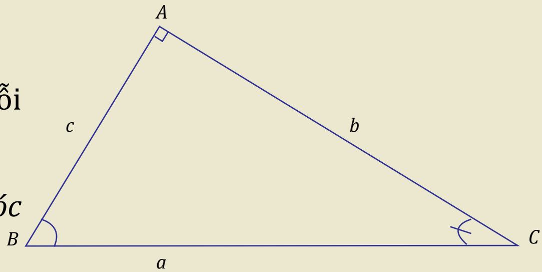
$\sin\alpha < \sin\beta$, $\tan\alpha < \tan\beta$

$\cos\alpha > \cos\beta$, $\cot\alpha > \cot\beta$

$\sin\alpha < \tan\alpha$, $\cos\alpha < \cot\alpha$

3. Hệ thức về góc và cạnh trong tam giác vuông

3.1. Các hệ thức



Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

a) Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với cos góc kề.

b) Cạnh góc vuông kia nhân với tan góc đối hoặc cot góc kề.

$b = a.\sin B = a.\cos C$

$c = a.\sin C = a.\cos B$

$b = c.\tan B = c.\cot C$

$c = b.\tan C = b.\cot B$

CHUYÊN ĐỀ 3

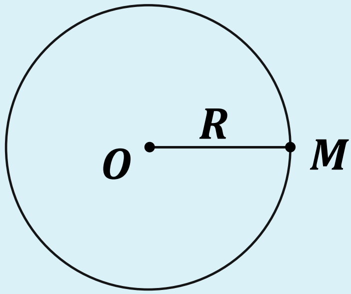
ĐƯỜNG TRÒN

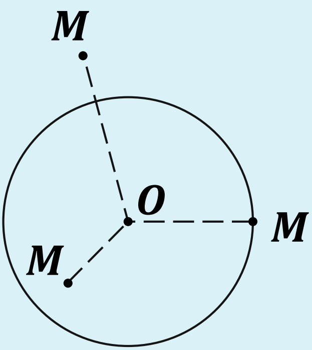
TỔNG QUAN VỀ ĐƯỜNG TRÒN

I. Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn

1. Đường tròn

Đường tròn tâm O bán kính R (R>0) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.





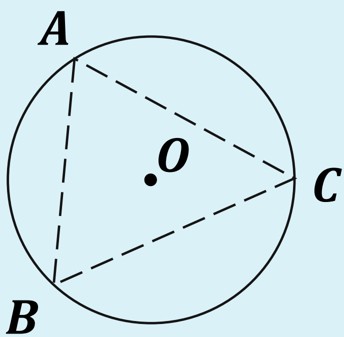
2. Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn

Cho đường tròn (O;R) và điểm M

- M nằm trên đường tròn (O;R) ⇔ OM=R
- M nằm trong đường tròn (O;R) ⇔ OM<R
- M nằm ngoài đường tròn (O;R) ⇔ OM>R

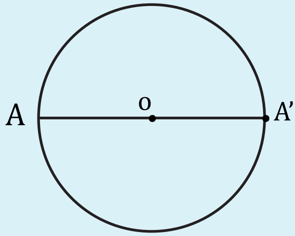
3. Cách xác định đường tròn

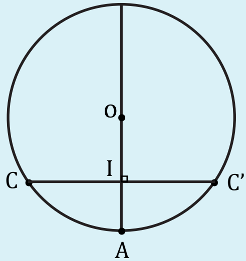
Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn



4. Tính chất đối xứng của đường tròn

- Đường tròn là hình có **tâm đối xứng.** Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó
- Đường tròn là hình có **trục đối xứng.** Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn





II. Dây của đường tròn

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

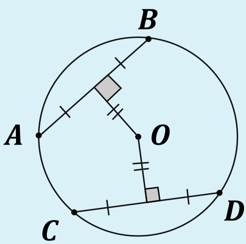
Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính

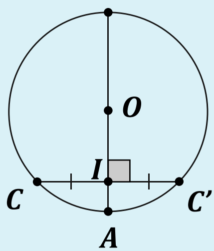
2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

- Trong một đường tròn:
+ 2 dây bằng nhau thì cách đều tâm
+ 2 dây cách đều tâm thì bằng nhau
- Trong 2 dây của một đường tròn:
+ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn
+ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn





III. Độ dài đường tròn và diện tích hình tròn

Cho đường tròn có bán kính R và đường kính d

• Độ dài đường tròn (hay còn gọi là chu vi) được tính bằng công thức:

$$C=2\pi R=\pi d$$

• Độ dài cung tròn: Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n° được tính theo công thức: $l = \frac{\pi R n}{180}$

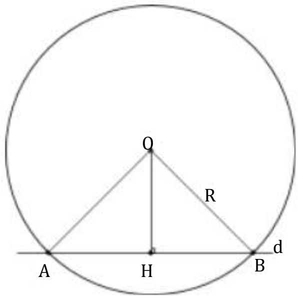
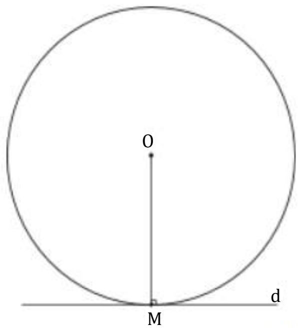
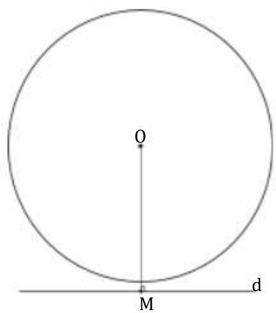
• Diện tích hình tròn: $S=\pi R^2$

• Diện tích hình quạt tròn: Trên đường tròn bán kính R, diện tích cung n° được tính theo công thức:

$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{lR}{2}$ (Với l là độ dài cung n° của hình quạt tròn)

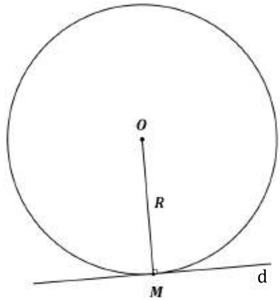
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

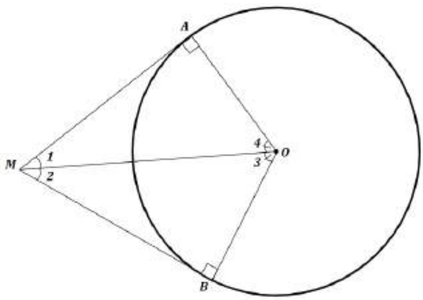
Vị trí tương đối	*Số điểm chung*	*Hệ thức giữa d và R*	*Hình minh họa*
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d(O;d) < R$	
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d(O;d) = R$	 *d* gọi là tiếp tuyến của *(O)* và *M* là tiếp điểm.
Đường thẳng và đường tròn không cắt nhau	0	$d(O;d) > R$	

Tính chất của tiếp tuyến

- Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm đó.
- Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.



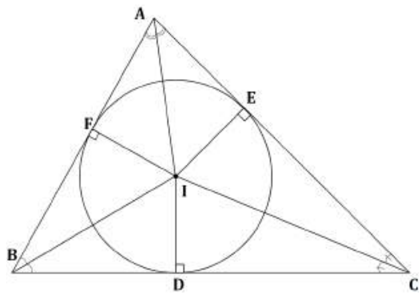
Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau



MA và MB là hai tiếp tuyến của đường tròn *(O)*.
Khi đó: $MA=MB$; $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$; $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$

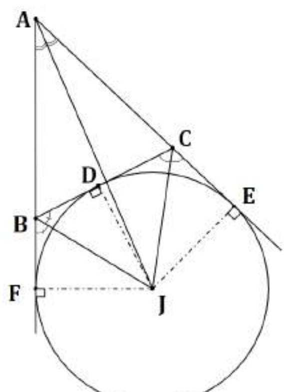
Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác được gọi là **đường tròn nội tiếp** tam giác, còn tam giác được gọi là **ngoại tiếp đường tròn.**
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.



Đường tròn bàng tiếp tam giác

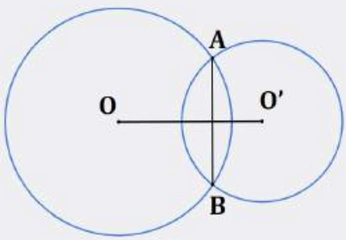
- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia được gọi là **đường tròn bàng tiếp** tam giác.
- Mỗi tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.



2. Vị trí tương đối của hai đường tròn

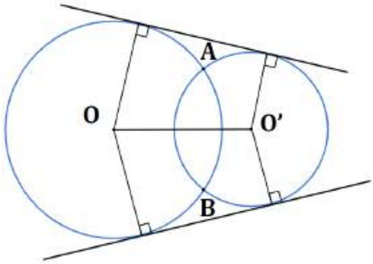
Cho hai đường tròn *(O;R)* và *(O';r) (với R>r)*

2.1. Hai đường tròn cắt nhau

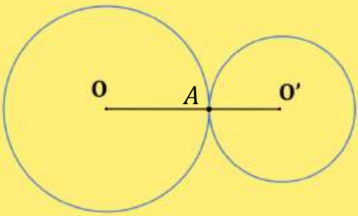


- Số điểm chung: 2
- Hệ thức giữa OO' với R và r: R-r<OO'<R+r
- Tính chất: OO' là trung trực của dây AB

- Tiếp tuyến chung: Có 2 tiếp tuyến chung ngoài

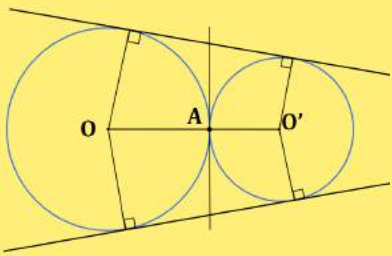


2.2. Hai đường tròn tiếp xúc nhau



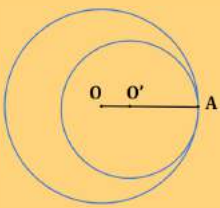
- Số điểm chung: 1
- Hệ thức giữa OO' với R và r: OO'=R+r
- Tính chất: Tiếp điểm nằm trên đường nối tâm. (A nằm trên đoạn OO')

- Tiếp tuyến chung: Có 2 tiếp tuyến chung ngoài và 1 tiếp tuyến chung trong



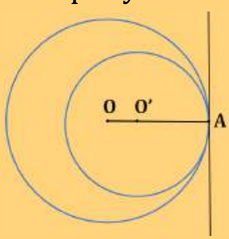
Tiếp xúc ngoài

Tiếp xúc trong



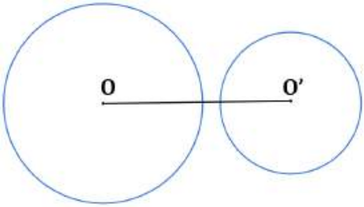
- Số điểm chung: 1
- Hệ thức giữa OO' với R và r: OO'=R-r
- Tính chất: A nằm ngoài đoạn OO'

- Tiếp tuyến chung: Có 1 tiếp tuyến chung



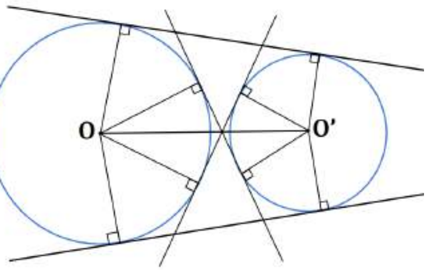
2.3. Hai đường tròn không giao nhau

• *Ở ngoài nhau*

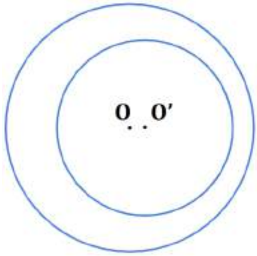


- Số điểm chung: 0
- Hệ thức giữa OO’ với R và r: OO'>R+r

- Tiếp tuyến chung: Có 2 tiếp tuyến chung ngoài và 2 tiếp tuyến chung trong



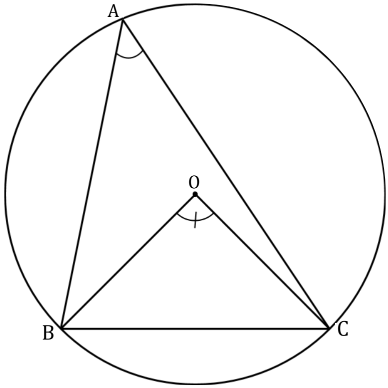
• *(O) đựng (O’)*



- Số điểm chung: 0
- Hệ thức giữa OO’ với R và r: OO'<R-r
- Không có tiếp tuyến chung

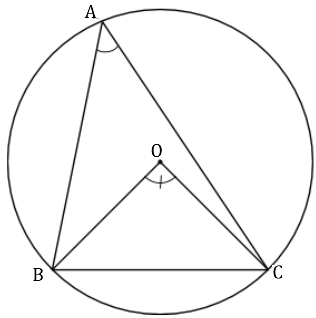
GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

1 Góc ở tâm



- Góc $\widehat{BOC}$ có đỉnh O trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.
- Cung BC nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.
- Chú ý: Góc bẹt chắn nửa đường tròn.
- $\widehat{BOC} = sđ\,\overset{\frown}{BC}$ *(Số đo của cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó).*

2 Góc nội tiếp



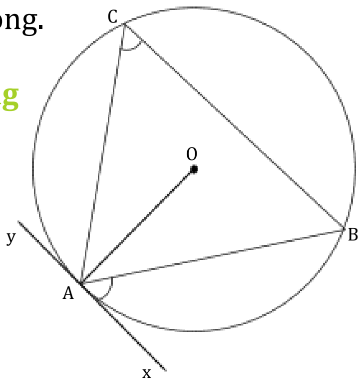
- Góc $\widehat{BAC}$ có đỉnh A nằm trên đường tròn và hai cạnh AB, AC là hai dây cung được gọi là góc nội tiếp.
- Cung BC nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{BC}$ (Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn).

- Tính chất: Trong một đường tròn:

+ Các góc nội tiếp bằng nhau thì chắn các cung bằng nhau.
+ Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
+ Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
+ Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

3 Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

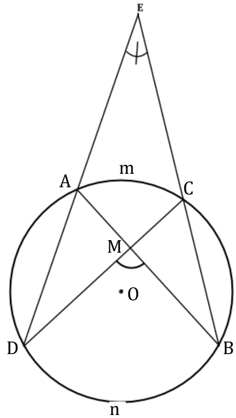


- Góc $\widehat{BAx}$ hoặc $\widehat{BAy}$ có đỉnh là tiếp điểm, một cạnh là tia tiếp tuyến và cạnh còn lại là dây cung được gọi là **góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.**
- Cung AB được gọi là **cung bị chắn.**

• $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{AB}$ Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn).

• Tính chất: Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

4 Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn

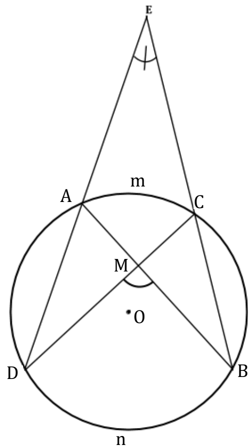


• Góc $\widehat{BMD}$ có đỉnh M nằm trong đường tròn (O), được gọi là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

• Góc $\widehat{BMD}$ chắn hai cung $\overset{\frown}{BnD}$ và $\overset{\frown}{AmC}$

• $\widehat{BMD}=\frac{1}{2}$(sđ$\overset{\frown}{BnD}$ + sđ$\overset{\frown}{AmC}$) *(Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn).*

5 Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn



•Góc $\widehat{BED}$ có đỉnh E nằm ngoài đường tròn (O), được gọi là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.

• Góc $\widehat{BED}$ chắn hai cung $\overset{\frown}{BnD}$ và $\overset{\frown}{AmC}$

• $\widehat{BED}=\frac{1}{2}$ (sđ$\overset{\frown}{BnD}$ - sđ$\overset{\frown}{AmC}$) *(Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn).*

6 So sánh hai cung, liên hệ giữa cung và dây

• **So sánh hai cung:**

Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

+ Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau

+ Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn

+ Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì: sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$ + sđ$\overset{\frown}{CB}$

Định lí 1:

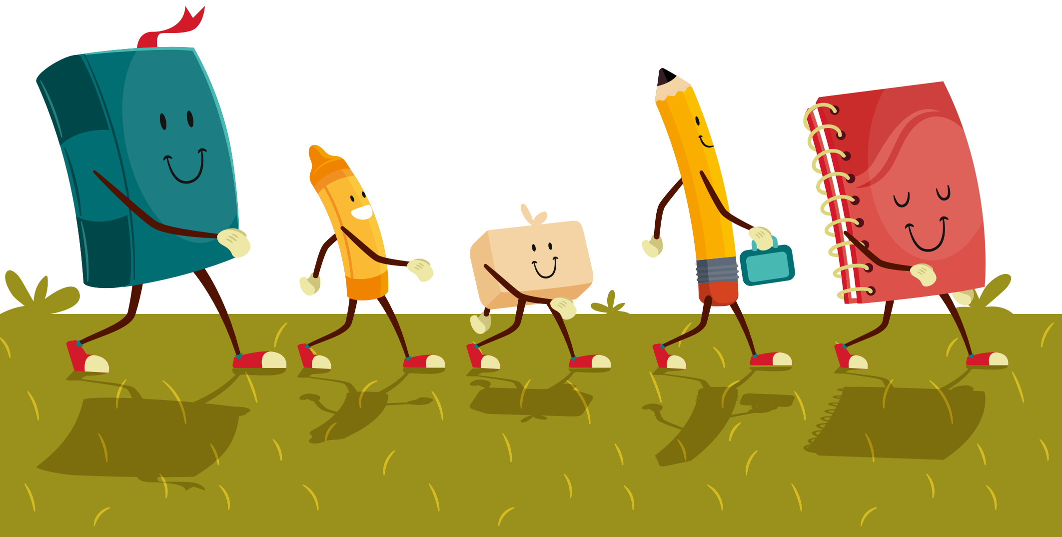
Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:
+ Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
+ Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

Định lí 2:

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:
+ Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
+ Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

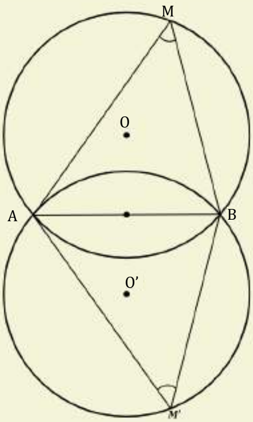
Bổ sung:

- Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.



CUNG CHỨA GÓC

1. Quỹ tích cung chứa góc



1. Với đoạn thẳng AB và góc α ($0^o<\alpha<180^o$)cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\widehat{AMB}=\alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB
2. Hai cung chứa góc nói trên là hai cung tròn đối xứng với nhau qua AB
3. Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB
4. Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích

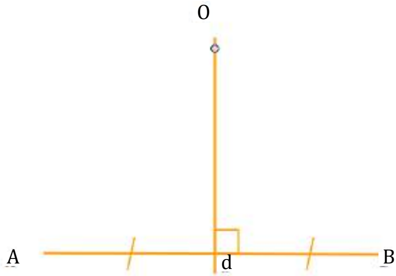
2. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất T là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần:

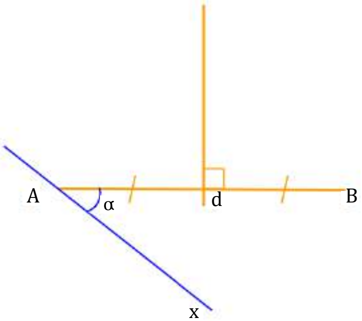
- Phần thuận: Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H
- Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T
- Kết luận: Quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H

3. Cách vẽ cung chứa góc

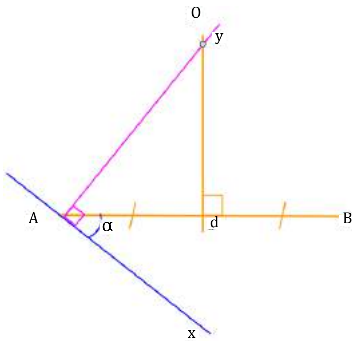
Bước 1: Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB



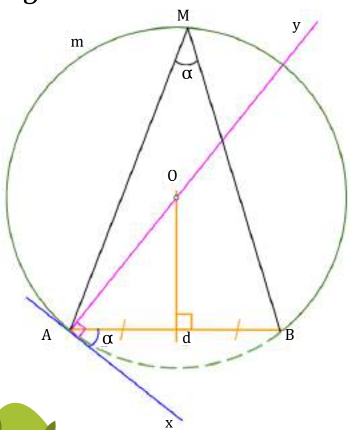
Bước 2: Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α



Bước 3: Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax. Gọi O là giao điểm của Ay với d



Bước 4: Vẽ cung AmB, tâm O, bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax

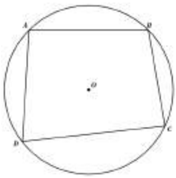


TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. Các kiến thức cần nhớ

a. Định nghĩa tứ giác nội tiếp

• Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó.

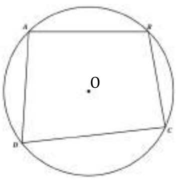


• Định lý
- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180°.
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

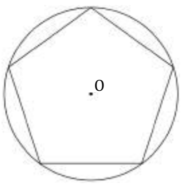
• Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp
- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°.
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối với đỉnh đó.
- Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (mà có thể xác định được). Điểm đó là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới cùng một góc .

• Chú ý: Trong các hình đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.

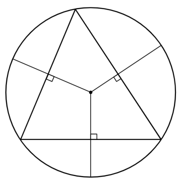
b. Đường tròn ngoại tiếp



• Đường tròn đi qua qua tất cả các đỉnh của một đa giác gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.



• Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp.



• Một tam giác bất kì luôn có duy nhất một đường tròn ngoại tiếp có tâm là giao điểm của ba đường trung trực.

2. Các dạng toán thường gặp

Dạng 1: Chứng minh tứ giác nội tiếp

Phương pháp: Để chứng minh tứ giác nội tiếp, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1. Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°.

Cách 2. Chứng minh tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới cùng một góc .

Cách 3. Chứng minh tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối với đỉnh đó.

Cách 4. Tìm được một điểm cách đều bốn đỉnh của tứ giác.

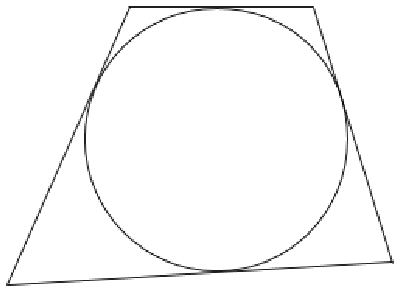
Dạng 2: Chứng minh các góc bằng nhau, đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song, hệ thức giữa các cạnh…

Phương pháp: Sử dụng tính chất của tứ giác nội tiếp

TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP - ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

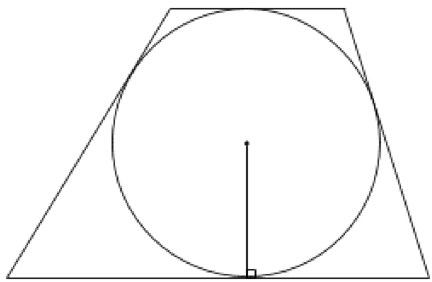
1

Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.



2

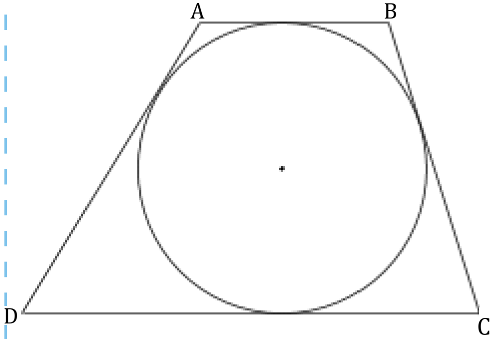
Bán kính đường tròn nội tiếp bằng khoảng cách từ tâm đến một cạnh bất kì của đa giác.



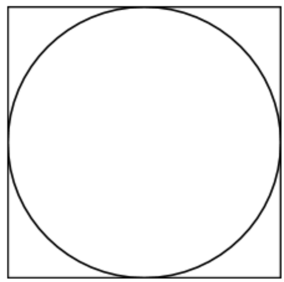
3

Nếu một tứ giác ngoại tiếp một đường tròn thì tổng các cặp cạnh đối bằng nhau. Đảo lại, nếu 1 tứ giác có tổng các cặp cạnh đối bằng nhau thì tứ giác đó ngoại tiếp một đường tròn.

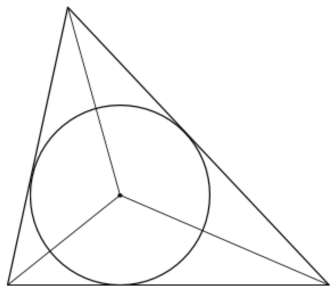
AB+CD=AD+BC



4 Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.



5 Một tam giác bất kì luôn có duy nhất một đường tròn nội tiếp có tâm là giao điểm của ba đường phân giác.



CHUYÊN ĐỀ 4

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

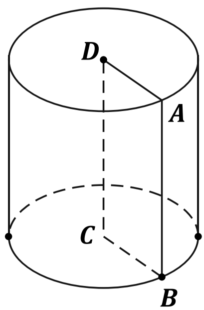
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I. Hình trụ - diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ

1. Hình trụ

Khi quay hình chữ nhật ABCD một vòng quanh cạnh CD cố định, ta được một hình trụ (hình vẽ).

- DA, CB quét nên hai đáy của hình trụ, là hai hình tròn bằng nhau nằm trong hai mặt phẳng song song, có tâm D và C.
- Cạnh AB quét nên mặt xung quanh của hình trụ, mỗi vị trí của AB được gọi là một đường sinh.
- Các đường sinh của hình trụ vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài đường sinh là chiều cao của hình trụ.



- DC là trục của hình trụ.
- Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình trụ (mặt cắt) là một hình tròn bằng hình tròn đáy.
- Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục DC thì mặt cắt là một hình chữ nhật.

2. Các công thức

Với hình trụ bán kính đáy r và chiều cao h, ta có:

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh$

Thể tích hình trụ: $V = S.h = \pi r^2 h$

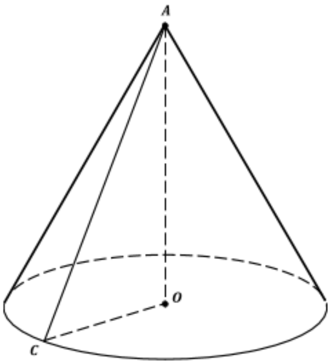
Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

II. Hình nón - Hình nón cụt

1. Hình nón

Khi quay tam giác vuông AOC quanh cạnh góc vuông OA cố định thì được một hình nón (hình vẽ).

- Cạnh OC quét nên đáy của hình nón, là một hình tròn tâm O.
- Cạnh AC quét nên mặt xung quanh của hình nón, mỗi vị trí của AC được gọi là một đường sinh.
- A gọi là đỉnh và AO gọi là đường cao của hình nón.



Công thức: Gọi bán kính đáy của hình nón là r, đường sinh là l , chiều cao h ta có:

-Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi rl$

- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$

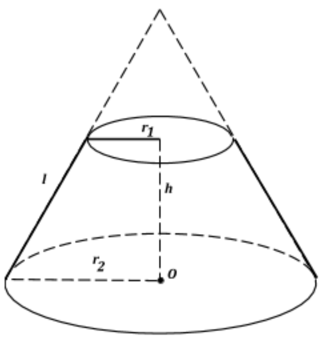
- Thể tích hình tròn: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

2. Hình nón cụt

Cho hình nón cụt có r_1, r_2 là các bán kính đáy, l là độ dài đường sinh, h là chiều cao.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(r_1+r_2)l$

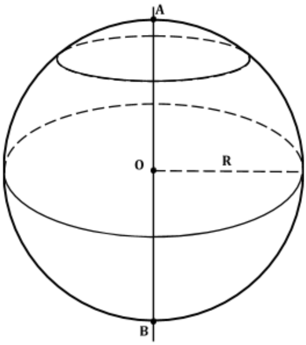
- Thể tích hình nón cụt: $V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$



III. Hình cầu

1. Hình cầu

Khi quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu (hình vẽ).



- Nửa đường tròn trong phép quay nói trên tạo nên mặt cầu.
- Điểm O được gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu hay mặt cầu đó.
- Khi cắt hình cầu bán kính R bởi một mặt phẳng, ta được một hình tròn.
- Khi cắt mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng, ta được một đường tròn:

Đường tròn đó có bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm (gọi là đường tròn lớn).

Đường tròn đó có bán kính bé hơn R nếu mặt phẳng không đi qua tâm.

2. Công thức

Một hình cầu có bán kính R, ta có:

Diện tích mặt cầu:

$$S = 4\pi R^2 \text{ hay } S = \pi d^2$$

(d là đường kính của mặt cầu).

Thể tích hình cầu:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

CHƯƠNG TRÌNH HỌC TỐT

Trang bị kiến thức cơ bản theo chương trình sách giáo khoa
Thực hành kiến thức thông qua câu hỏi và bài tập vận dụng bám sát nội dung bài học.

HM10 TỔNG ÔN

Ôn tập toàn diện kiến thức, phương pháp làm bài theo từng chuyên đề bám sát cấu trúc đề thi tuyển sinh THPT không chuyên những năm gần đây trên cả nước.

HM10 LUYỆN ĐỀ

Tập trung vào rèn phương pháp, luyện kỹ năng trước kì thi vào 10 cho các học sinh đã trải qua quá trình ôn luyện tổng thể.